МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 DOI 10.12737/22147

Вдавливание сферического штампа с шероховатой поверхностью в упругое трансверсально-изотропное полупространство с функционально-градиентным покрытием *

А. С. Васильев[1], С. С. Волков[2], Е. В. Садырин[3], А. Н. Литвиненко[4]**

[1,2,3] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

[1,2] Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация

[4] Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Indentation of rough-surfaced spherical punch into elastic transversely isotropic half-space with functionally-graded coating ***

A. S. Vasiliev [1], S. S. Volkov[2], E. V. Sadyrin[3], A. N. Litvinenko[4]**

[1,2,3] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[1,2] N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

[4] Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

В работе рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости о вдавливании жесткого сферического штампа с неровной формой поверхности в трансверсально изотропное полупространство с функционально градиентным трансверсально изотропным покрытием. Модули упругости в покрытии изменяются с глубиной по произвольным непрерывным или кусочно-постоянным независимым друг от друга законам. Решение задачи сведено к решению парного интегрального уравнения, шероховатая структура штампа моделируется отрезком ряда Фурье-Бесселя. Трансформанта ядра аппроксимируется произведением дробно-квадратичных функций, для которых получены замкнутые аналитические решения парных интегральных уравнений. Полученные решения асимптотически точны для малых и больших значений относительной толщины покрытия. Разработана схема численного построения функций податливости для случая одновременного действия произвольных осесимметричных нормальной и касательной нагрузок.

An axisymmetric contact problem of the elasticity theory of the rigid rough-surfaced spherical punch indentation into an elastic transversely isotropic half-space with the functionally-graded transversely isotropic coating is considered. Elastic moduli of the coating vary with depth according to the arbitrary continuous or piecewise constant independent functions. The technique based on the integral transformations is used to reduce the problem to the integral equation. The punch roughness is modeled by the Fourier-Bessel series. Special approximation for the kernel transform is used to obtain the approximated analytical solution to the integral equation. The resulting solution is asymptotically exact for both small and large values of the relative thickness of the coating. A method of construction of the compliance functions is presented for the case of the simultaneous action of the arbitrary axisymmetric normal and tangential loadings.

Ключевые слова: контакт, упругость, сферический штамп, шероховатость, покрытие, неоднородность, функционально градиентные и слоистые материалы.

Keywords: contact, elasticity, spherical punch, roughness, coating, inhomogeneity, functionally-graded and layered materials.

Введение. Контактным задачам для функционально-градиентных материалов и покрытий посвящено большое количество современных исследований. Однако, большинство известных в литературе результатов получены лишь для частных случаев изменения упругих свойств в покрытии. Возникающие при этом интегральные уравнения решаются в основном численно и полученные решения эффективны лишь в некотором ограниченном диапазоне значений геометрического параметра задачи (относительная толщина покрытия) [1–3].

При проведении эксперимента по наноиндентированию используют штампы с различной формой наконечника. Наиболее распространены штампы сферической, пирамидальной или конической формы. Однако, в процессе изготовления штампа не удаётся добиться идеальной формы наконечника, кроме того форма штампа может изменяться в процессе эксплуатации [4]. Перед проведением экспериментов форма наконечника индентора обычно отдельно изуча-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 16-07-00958-а, 15-38-20790-мол_а_вед, 15-07-05820-а) и гранта Президента Российской Федерации МК-5342.2016.1.

** E-mail: andre.vasiliev@gmail.com, fenix_rsu@mail.ru, evgeniy.sadyrin@gmail.com, litva@sfedu.ru

*** The research is supported by RFFI (grants nos.16-07-00958-a, 15-38-20790- mol_a_ved, 15-07-05820-a) and by the grant of President of the Russian Federation (no. MK-5342.2016.1.).

ется с помощью, например, растрового электронного микроскопа [5, 6]. Однако, математическое моделирование, позволяющее учесть отличие формы штампа от идеальной, изучено очень слабо.

В настоящей работе разработана модель, позволяющая учесть неровности поверхности штампа и непрерывно-неоднородную или кусочно-однородную анизотропную структуру покрытия. Рассмотрена контактная задача о вдавливании недеформируемого штампа в трансверсально-изотропное полупространство с функционально-градиентным покрытием. Основное отличие от аналогичной задачи для изотропных материалов состоит в схеме построения трансформанты ядра интегрального уравнения (функции податливости среды). В работе предложена схема построения функций податливости при действии произвольных осесимметричной нормальной и касательной нагрузок. Считается, что форма штампа неидеальна, неровности поверхности модулируются отрезком ряда Фурье-Бесселя. Построено приближенное аналитическое решение контактной задачи, асимптотически точное для малых и больших значений относительной толщины покрытия и обладающее высокой точностью для покрытий средней толщины.

Построение функций податливости. Рассмотрим упругое неоднородное полупространство Ω с верхней гранью Г. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z. Ось z нормальна поверхности Г и совпадает с осью анизотропии. Модули упругости полупространства изменяются по законам:

$$c_{kj}=\begin{cases} c_{kj}^{(c)}(z) & -H\le z\le 0 \\ c_{kj}^{(s)}=const & -\infty<z<-H \end{cases},\ (kj)=11, 12, 13, 33, 44,$$

где $c_{kj}^{(c)}(z)$ — непрерывно-дифференцируемые функции, определяющие закон изменения упругих модулей в покрытии ($-H\le z\le 0$), $c_{kj}^{(s)}(z)$ — постоянные, определяющие значения упругих модулей подложки. Здесь и далее индексы (c) и (s) соответствуют покрытию и подложке соответственно. Покрытие и подложка жестко сцеплены между собой:

$$z=-H:\quad w^{(c)}=w^{(s)},\ u^{(c)}=u^{(s)},\ \sigma_z^{(c)}=\sigma_z^{(s)},\ \tau_{rz}^{(c)}=\tau_{rz}^{(s)}. \tag{1}$$

Рассмотрим действие произвольной осесимметричной нормальной и касательной нагрузок в круговой области $0\le r\le a$ покрытия. Вне этой области поверхность не нагружена:

$$\sigma_z\big|_{z=0}=\begin{cases}-p(r),\ r\le a\\ 0,\quad r>a\end{cases},\ \tau_{rz}\big|_{z=0}=\begin{cases}\tau(r),\ r\le a\\ 0,\quad r>a\end{cases}. \tag{2}$$

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропного материала имеют вид:

$$\sigma_r=c_{11}\frac{\partial u}{\partial r}+c_{12}\frac{u}{r}+c_{13}\frac{\partial w}{\partial z},\ \sigma_\varphi=c_{12}\frac{\partial u}{\partial r}+c_{11}\frac{u}{r}+c_{13}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\sigma_z=c_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)+c_{33}\frac{\partial w}{\partial z},\quad \tau_{rz}=c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right). \tag{3}$$

Уравнения равновесия ввиду симметричности относительно координаты φ принимают вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0. \tag{4}$$

Используя преобразование Ханкеля

$$u(r,z)=-\int_0^\infty\bar u(\gamma,z)\,\mathrm{J}_1(\gamma r)\gamma d\gamma,\ \{w(r,z),p(r),\tau(r)\}=\int_0^\infty\{\bar w(\gamma,z),\bar p(\gamma),\bar\tau(\gamma)\}\,\mathrm{J}_0(\gamma r)\gamma d\gamma \tag{5}$$

и соотношения (3), уравнения (4) можно преобразовать в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases}\bar w'(c_{13}+c_{44})\gamma+\bar w c_{44}'\gamma+\bar u'' c_{44}+\bar u' c_{44}'-\bar u c_{11}\gamma^2=0,\\ \bar w'' c_{33}+\bar w' c_{33}'-\bar w c_{44}\gamma^2-\bar u'(c_{13}+c_{44})\gamma-\bar u c_{13}'\gamma=0.\end{cases} \tag{6}$$

Граничные условия (1) и (2), используя (5), принимают вид:

$$z=-H:\bar w^{(c)}=\bar w^{(s)},\ \bar u^{(c)}=\bar u^{(s)}, \tag{7}$$

$$z=-H:c_{33}^{(c)}\bar w'^{(c)}-c_{13}^{(c)}\gamma\bar u^{(c)}=c_{33}^{(s)}\bar w'^{(s)}-c_{13}^{(s)}\gamma\bar u^{(s)}, \tag{8}$$

$$z=-H:c_{44}^{(c)}(\bar u'^{(c)}+\gamma\bar w^{(c)})=c_{44}^{(s)}(\bar u'^{(s)}+\gamma\bar w^{(s)}), \tag{9}$$

$$z=0:\quad c_{33}^{(c)}\bar w'^{(c)}-c_{13}^{(c)}\gamma\bar u^{(c)}=-\bar p(\gamma),\ c_{44}^{(c)}(\bar u'^{(c)}+\gamma\bar w^{(c)})=\bar\tau(\gamma). \tag{10}$$

Перепишем систему (6) в матричном виде:

$$x'=A^{(c)}\cdot x,-H\le z\le 0, \tag{11}$$

$$A^{(c)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma^2\dfrac{c_{11}^{(c)}}{c_{44}^{(c)}} & -\dfrac{c_{44}'^{(c)}}{c_{44}^{(c)}} & -\gamma\dfrac{c_{44}'^{(c)}}{c_{44}^{(c)}} & -\gamma\dfrac{c_{13}^{(c)}+c_{44}^{(c)}}{c_{44}^{(c)}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma\dfrac{c_{13}'^{(c)}}{c_{33}^{(c)}} & \gamma\dfrac{c_{13}^{(c)}+c_{44}^{(c)}}{c_{33}^{(c)}} & \gamma^2\dfrac{c_{44}^{(c)}}{c_{33}^{(c)}} & \dfrac{c_{33}'^{(c)}}{c_{33}^{(c)}} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{u}'\\ \bar{w}\\ \bar{w}'\end{pmatrix}.$$

Для однородной подложки ($z\le -H$) система (11) упрощается до системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$x'=A^{(s)}\cdot x,\ z\le -H, \tag{12}$$

$$A^{(s)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma^2\dfrac{c_{11}^{(s)}}{c_{44}^{(s)}} & 0 & 0 & -\gamma\dfrac{c_{13}^{(s)}+c_{44}^{(s)}}{c_{44}^{(s)}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma\dfrac{c_{13}^{(s)}+c_{44}^{(s)}}{c_{33}^{(s)}} & \gamma^2\dfrac{c_{44}^{(s)}}{c_{33}^{(s)}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Помимо граничных условий (7)–(10) полагаем, что выполнены условия затухания смещений на бесконечности:

$$u(r,z)\underset{z\to-\infty}{\to}0,\ w(r,z)\underset{z\to-\infty}{\to}0. \tag{13}$$

Будем искать решение систем (11) и (12) в виде:

$$\begin{aligned} x^{(c)}(\gamma,z)&=-\bar{p}(\gamma)\gamma^{-1}a_1^{(c)}(\gamma,z)+\bar{\tau}(\gamma)\gamma^{-1}a_2^{(c)}(\gamma,z),\\ x^{(s)}(\gamma,z)&=-\bar{p}(\gamma)\gamma^{-1}a_1^{(s)}(\gamma,z)+\bar{\tau}(\gamma)\gamma^{-1}a_2^{(s)}(\gamma,z). \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда, ввиду линейности, получаем системы для определения векторов $\mathbf{a}_j^{(c)},\mathbf{a}_j^{(s)}$:

$$a_j'^{(c)}=A^{(c)}\cdot a_j^{(c)},\ j=1,2, \tag{15}$$

$$a_j'^{(s)}=A^{(s)}\cdot a_j^{(s)},\ j=1,2. \tag{16}$$

Общее решение системы (16), соответствующей подложке, имеет вид:

$$a_j^{(s)}(\gamma,z)=\sum_{k=1}^{4}D_{jk}(\gamma)k_{jk}e^{\alpha_k\gamma z}. \tag{17}$$

Здесь $k_{jk}\in R,(j=1,2;\ k=1,2,3,4)$ — известные постоянные, зависящие от упругих модулей подложки, их значения не приводятся ввиду громоздкости; α_k — корни биквадратного характеристического уравнения:

$$\alpha_k=\pm\sqrt{\frac{(c_{11}c_{33}-c_{13}^2-2c_{13}c_{44})\pm\sqrt{(c_{13}^2-c_{11}c_{33})(4c_{44}(c_{13}+c_{44})+c_{13}^2-c_{11}c_{33})}}{2c_{33}c_{44}}}.$$

В общем случае α_k различны. Кратные корни возникают, если выполнено одно из условий: $c_{13}^2=c_{11}c_{33}$ или $(c_{13}+2c_{44})^2=c_{11}c_{33}$, например, в случае изотропного материала. Подробно процесс построения функций податливости для случая кратных корней описан в работе [7], поэтому далее будем полагать, что α_k различны. Параметры $D_{jk}(\gamma)$ подлежат определению из граничных условий. Из (13) следует, что коэффициенты при слагаемых, соответствующих α_k с отрицательной вещественной частью, равны нулю. Обозначим корни с неотрицательной вещественной частью через α_1 и α_2. Тогда (17) принимает вид:

$$a_j^{(s)}(\gamma,z)=D_{j1}(\gamma)k_{j1}e^{\alpha_1\gamma z}+D_{j2}(\gamma)k_{j2}e^{\alpha_2\gamma z}.$$

Граничные условия относительно векторов $a_j^{(c)},a_j^{(s)}$ принимают вид:

$$z=-H:\ a_j^{(c)}=a_j^{(s)},\ j=1,2, \tag{18}$$

$$z=-H:\ c_{33}^{(c)}a_{j4}^{(c)}-c_{13}^{(c)}\gamma a_{j1}^{(c)}=c_{33}^{(s)}a_{j4}^{(s)}-c_{13}^{(s)}\gamma a_{j1}^{(s)}, \tag{19}$$

$$z=-H:\ c_{44}^{(c)}(a_{j2}^{(c)}+\gamma a_{j3}^{(c)})=c_{44}^{(s)}(a_{j2}^{(s)}+\gamma a_{j3}^{(s)}), \tag{20}$$

$$z=0:\ \begin{pmatrix} c_{33}^{(c)}a_{j4}^{(c)}-c_{13}^{(c)}\gamma a_{j1}^{(c)} \\ c_{44}^{(c)}(a_{j2}^{(c)}+\gamma a_{j3}^{(c)}) \end{pmatrix}=\gamma\cdot e_j,\ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Таким образом, для вычисления неизвестных $a_j^{(c)}=\left(a_{j1}^{(c)},a_{j2}^{(c)},a_{j3}^{(c)},a_{j4}^{(c)}\right)^T$ получены две краевые двухточечные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (15) и граничными условиями (19)–(21). Неизвестные $D_{jk}(\gamma)$, $j,k=1,2$, находятся из условия (18). Введем функции эффективных упругих модулей:

$$\Theta_{21}(z)=\frac{\sqrt{c_{44}}}{\sqrt{c_{33}}}\left(\sqrt{c_{11}c_{33}}+c_{13}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}-c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}+c_{13}+2c_{44}}},$$

$$\Theta_{13}(z)=\frac{\sqrt{c_{44}}}{\sqrt{c_{11}}}\left(\sqrt{c_{11}c_{33}}+c_{13}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}-c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}+c_{13}+2c_{44}}},$$

$$\Theta_{23}(z)=\Theta_{11}(z)=-\sqrt{c_{11}c_{33}}-c_{13}$$

и отдельно введём обозначения для их значений, соответствующих подложке и поверхности покрытия: $\Theta_{kj}^{(c)}=\Theta_{kj}(0),\Theta_{kj}^{(s)}=\Theta_{kj}(-H-0)$. Наконец, введём функции податливости аналогично терминологии А.К. Приварникова [8]:

$$L_{kj}(\gamma,z)=\Theta_{kj}^{(c)}a_{jk}(\gamma,z).$$

Функции $L_{kj}(\gamma,z)$, $k=1,2$, $j=1,3$ не зависят от приложенной нагрузки. В общем случае они могут быть вычислены лишь численно при фиксированном значении γ. При $z=0$ функции податливости положительны для любого γ, и выполнено $\lim\limits_{\gamma\to\infty}L_{kj}(\gamma,0)=1$ и $\lim\limits_{\gamma\to 0}L_{kj}(\gamma,0)=\Theta_{kj}^{(c)}/\Theta_{kj}^{(s)}$. Таким образом, значение функции податливости в нуле — есть отношение значений эффективных упругих модулей, соответствующих поверхности покрытия и подложке.

Из (14) получим формулы для смещений точек покрытия в виде линейной комбинации образов преобразования Ханкеля от действующих на поверхности нормальной и касательной нагрузок:

$$\overline{u}^{(c)}(\gamma,z)=-\frac{L_{11}(\gamma,z)}{\gamma\Theta_{11}^{(c)}}\overline{p}(\gamma)+\frac{L_{21}(\gamma,z)}{\gamma\Theta_{21}^{(c)}}\overline{\tau}(\gamma),$$

$$\overline{w}^{(c)}(\gamma,z)=-\frac{L_{13}(\gamma,z)}{\gamma\Theta_{13}^{(c)}}\overline{p}(\gamma)+\frac{L_{23}(\gamma,z)}{\gamma\Theta_{23}^{(c)}}\overline{\tau}(\gamma). \qquad (22)$$

Описанная выше схема построения функций податливости может быть использована для сведения смешанных задач теории упругости к решению интегральных уравнений, при этом $L_{kj}(\gamma,0)$ будут являться трансформантами ядер этих интегральных уравнений.

Задача о вдавливании штампа. Пусть недеформируемый сферический штамп с неровной поверхностью контактирует с верхней гранью Γ полупространства Ω по области $z=0, r\le a$. К штампу приложена вдавливающая сила P, ось которой совпадает с осью z. Силы трения предполагаются отсутствующими [рис. 1]. Под действием силы P штамп переместится в направлении оси z на величину $-\delta$. Считаем, что распределение неровностей (шероховатости) штампа не зависит от угловой координаты и может быть смоделировано отрезком ряда Фурье-Бесселя. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом: $\sigma_z\big|_{z=0}=-p_a(r),\ r\le a$.

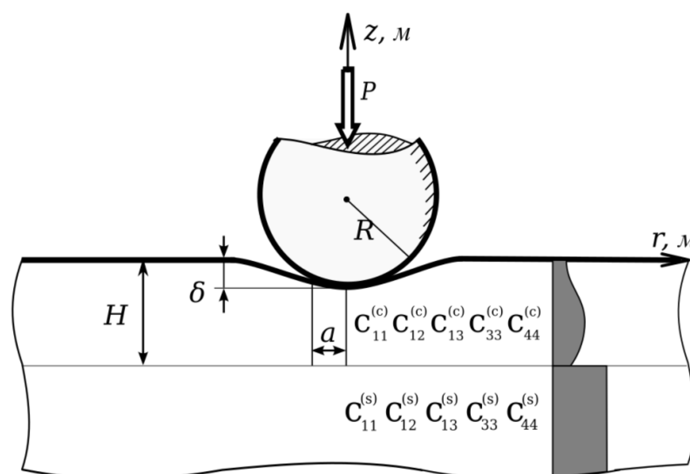


Рис. 1. Постановка контактной задачи о вдавливании

Граничные условия при данной постановке имеют вид:

$$z=0:\ \tau_{zr}^{(c)}=0,\ \begin{cases}\sigma_z^{(c)}=0, \quad r>a,\\ w^{(c)}=-\delta+r^2/2R+\sum\limits_{k=1}^{M}b_kJ_0(\mu_k r/a),\ r\le a,\end{cases} \qquad (23)$$

где R — радиус сферического штампа (который предполагается существенно больше, чем область контакта, и аппроксимируется параболоидом вращения), μ_k — положительные нули функции Бесселя J_0.

Используя (3), (5), (22) и (23) запишем интегральное уравнение задачи:

$$\int\limits_0^1 p(x)x\int\limits_0^\infty L_{13}\left(\frac{u}{H},0\right)J_0\left(\frac{ur'}{\lambda}\right)J_0\left(\frac{ux}{\lambda}\right)dudx=$$
$$\frac{\lambda\Theta_{13}^{(c)}}{a}\left(\delta-\frac{a^2r'^2}{2R}-\sum\limits_{k=1}^{M}b_kJ_0(\mu_k r')\right),\ r'\le 1. \qquad (24)$$

Здесь $\lambda=H/a$, $r'=r/a$, $p(x)=p_a(xa)$.

Используя двухсторонний асимптотический метод [9, 10] получим приближенное аналитическое решение интегрального уравнения (24):

$$p(r')=\frac{4a\Theta_{13}^{(s)}}{\pi R}\left[\sqrt{1-r'^2}+\sum\limits_{i=1}^{N}C_iA_i\lambda^{-1}\int\limits_{r'}^{1}\frac{sh(A_i\lambda^{-1}t)}{\sqrt{t^2-r'^2}}dt\right]-$$
$$-\frac{2\Theta_{13}^{(c)}}{\pi a}\sum\limits_{j=1}^{M}\frac{b_j\mu_j}{L_N(\lambda\mu_j)}\int\limits_{r'}^{1}\frac{sin(\mu_j t)}{\sqrt{t^2-r'^2}}dt,\ 0\le r'\le 1. \qquad (25)$$

Постоянные C_j определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum\limits_{j=1}^{N}C_jF\left(B_k\lambda^{-1},A_j\lambda^{-1}\right)+\frac{L_N(0)R}{2a^2}\sum\limits_{j=1}^{M}\frac{b_j}{L_N(\lambda\mu_j)}F\left(\frac{B_k}{\lambda},i\mu_j\right)=-\frac{(B_k\lambda^{-1}+1)\lambda^3}{B_k^3}.$$

Здесь k=1,…,N, i — мнимая единица, $L_N(u)$ — аппроксимация трансформанты ядра интегрального уравнения:

$$L_N(u)=\prod\limits_{i=1}^{N}\frac{u^2+A_i^2}{u^2+B_i^2}\approx L_{13}(\frac{u}{H},0),$$

$$F(B,\mu)=\frac{Bch(\mu)+\mu sh(\mu)}{B^2-\mu^2}-\frac{ch(\mu)}{B}.$$

Соотношения, связывающие радиус сферического штампа, зону контакта, осадку штампа и вдавливающую силу имеют вид:

$$\delta=\frac{2a^2}{R}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}C_i\,ch(A_i\lambda^{-1})+\frac{1}{2}+\sum\limits_{i=1}^{N}\left(A_i^{-2}\lambda^2-B_i^{-2}\lambda^2\right)\right)+\sum\limits_{k=1}^{M}\frac{b_k\,cos(\mu_k)}{L_N(\lambda\mu_k)},$$

$$P=\frac{8a^3\Theta_{13}^{(s)}}{3R}\left[1+3\sum\limits_{i=1}^{N}C_i(ch(A_i\lambda^{-1})-A_i^{-1}\lambda sh(A_i\lambda^{-1}))\right]+$$
$$+4\Theta_{13}^{(c)}a\sum\limits_{j=1}^{M}\frac{b_j\left(cos(\mu_j)+\mu_j sin(\mu_j)\right)}{L_N(\lambda\mu_j)}.$$

Полученные формулы являются асимптотически точными при $\lambda\to 0$ и $\lambda\to\infty$ [9]. Алгоритм построения аппроксимаций высокой точности и связь между погрешностью решения для произвольного значения λ и погрешностью аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения описаны в работе [11].

Выводы. Исследования, представленные в работе, являются естественным продолжением полученных ранее результатов для случая изотропных материалов [12–14]. Для штампов с плоским основанием или конической формы функции податливости среды остаются неизменными, изменяется лишь правая часть интегрального уравнения (35). Решения соответствующих интегральных уравнений построены авторами ранее [7, 13].

Схема построения функций податливости, предложенная в работе, может быть использована при решении ряда контактных задач с учётом одновременного действия на поверхности нормальных и касательных нагрузок и задач с учётом сил трения. Также аналогичная схема может быть применена при решении контактных задач в рамках электроупругости, термоупругости, магнитоупругости и т.д.

Метод решения интегрального уравнения, используемый в работе, позволяет с высокой точностью построить решения контактных задач даже при сложном немонотонном изменении упругих свойств в покрытии [15], а также в случае, когда упругие модули подложки более чем на порядок отличаются от упругих модулей покрытия [12].

Библиографический список

1. Liu, T.-J. Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials / T.-J. Liu, Y.-S. Wang, C. Zhang // Archive of Applied Mechanics. — 2008. — Vol. 78. — P. 267–282.

2. Ma, J. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch / J. Ma, L.-L. Ke, Y.-S. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2014. — Vol. 51. — P. 2791–2806.

3. Guler, M. A. Contact mechanics of graded coatings / M. A. Guler, F. Erdogan // International Journal of Solids and Structures. — 2004. — Vol. 41. — P. 3865–3889.

4. Головин, Ю. И. Наноиндентирование и его возможности / Ю. И. Головин — Москва : Машиностроение, 2009. — 312 с.

5. Influence of tip defect and indenter shape on the mechanical properties determination by indentation of a TiB_2–60%B_4C ceramic composite / D. Chicot [et al.] // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. — 2013. — Vol. 38. — P. 102–110.

6. Lim, Y. Y. Indentation of elastic solids with a rigid Vickers pyramidal indenter / Y. Y. Lim, M. M. Chaudhri // Mechanics of Materials. — 2006. — Vol. 38, iss. 12. — P. 1213–1228.

7. Айзикович, С. М. Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство/ С. М. Айзикович, В. М. Александров // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 2. — С. 73–77.

8. Вигдерович, И. Е. О решении граничных задач теории упругости для слоистых тел произвольной формы / И. Е. Вигдерович, В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников // IV Всесоюзн. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Киев: Наукова думка. — 1976. — С. 86.

9. Айзикович, С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред / С. М. Айзикович // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 148—158.

10. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S.M. Aizikovich [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2002. —Vol. 39, iss. 10. — P. 2745–2772.

11. Айзикович, С. М. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства / С. М. Айзикович, А. С. Васильев // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 129–137.

12. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers / A. S. Vasiliev [et al.] // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2014. — Vol. 94. — P. 705–712.

13. Айзикович, С. М. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием/ С. М. Айзикович, А. С. Васильев, С. С. Волков // Прикладная математика и механика. — 2015. — Т. 79, № 5. — С. 710–716.

14. Васильев, А. С. Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием / А. С. Васильев, Е. В. Садырин, И. А. Федотов // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — Т. 70–71, № 1–2. — С. 25–34.

15. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties / A. S. Vasiliev [et al.] // Archive of Applied Mechanics. — 2016. — Vol. 86, iss. 7. — P. 1247-1254.

References

1. Liu, T.-J., Wang, Y.-S., Zhang, C. Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials. Archive of Applied Mechanics, 2008, vol. 78, iss. 4, pp. 267–282.

2. Ma, J., Ke, L.-L., Wang, Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. International Journal of Solids and Structures, 2014, vol. 51, pp. 2791–2806.

3. Guler, M. A., Erdogan, F. Contact mechanics of graded coatings. International Journal of Solids and Structures, 2004, vol. 41, pp. 3865–3889.

4. Golovin, Y.I. Nanoindentirovanie i ego vozmozhnosti. [Nanoindentation and its possibilities.] Moscow: Mashinostroenie, 2009, 312 p. (in Russian).

5. Chicot, D., et al. Influence of tip defect and indenter shape on the mechanical properties determination by indentation of a TiB_2–60%B_4C ceramic composite. International Journal of Refractory Metals and Hard Materials, 2013, vol. 38, pp. 102–110.

6. Lim, Y. Y., Chaudhri, M. M. Indentation of elastic solids with a rigid Vickers pyramidal indenter. Mechanics of Materials, 2006, vol. 38, iss. 12, pp. 1213–1228.

7. Aizikovich, S. M., Alexandrov, V.M. Osesimmetrichnaya zadacha o vdavlivanii kruglogo shtampa v uprugoe, neodnorodnoe po glubine poluprostranstvo. [Axisymmetric problem of round punch indentation in elastic nonuniform in depth half-space.] Izvestia: Mechanics of Solids, 1984, no. 2, pp. 73–77 (in Russian).

8. Vigderovich, I.E., Lamzyuk, V.D., Privarnikov, A.K. O reshenii granichnykh zadach teorii uprugosti dlya sloistykh tel proizvol'noy formy. [On solution of boundary value problems of elasticity theory for layered arbitrary shaped bodies.] IV Vsesoyuzn. s"ezd po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike. Annotatsii dokladov. [IV All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Abstracts.] Kiev: Naukova dumka, 1976, p. 86 (in Russian).

9. Aizikovich, S. M. Asymptotic solutions of contact problems of elasticity theory for media non-homogeneous with depth. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1982, vol. 46, pp. 116—124.

10. Aizikovich, S.M., et al. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties. International Journal of Solids and Structures, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2745–2772.

11. Aizikovich, S. M., Vasiliev, A. S. A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem for the torsion of an elastic halfspace inhomogeneous in depth. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2013, vol. 77, pp. 91–97.

12. Vasiliev, A. S., et al. Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2014, vol. 94, pp. 705–712.

13. Aizikovich, S. M, Vasiliev, A. S., Volkov, S.S. The axisymmetric contact problem of the indentation of a conical punch into a half-space with a coating inhomogeneous in depth. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2015, vol. 79, pp. 500–505.

14. Vasiliev, A. S., Sadyrin, E.V., Fedotov, I.A. Kontaktnaya zadacha o kruchenii kruglym shtampom transversal'no-izotropnogo uprugogo poluprostranstva s neodnorodnym transversal'no-izotropnym pokrytiem. [Contact problem on torsion of transversely isotropic elastic half-space with inhomogeneous transversely isotropic coating by round die.] Vestnik of DSTU, 2013, vol. 70–71, no. 1–2, pp. 25–34 (in Russian).

15. Vasiliev, A. S., et al. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties. Archive of Applied Mechanics, 2016, vol. 86, iss. 7, pp. 1247-1254.

Поступила в редакцию 15.09.2016
Сдана в редакцию 15.09.2016
Запланирована в номер 30.09.2016

Received 15.09.2016
Submitted 15.09.2016
Scheduled in the issue 30.09.2016